Решение демонстрационного варианта КИМ ЕГЭ-2018 по математике.
П р о ф и л ь н ы й   у р о в е н ь .

1

Поезд отправился в Москву из Санкт-Петербурга в 23 часа 50 минут (время московское) и прибыл в Москву в 7 часов 50 минут следующих суток. Сколько часов поезд находился в пути?

Решение.

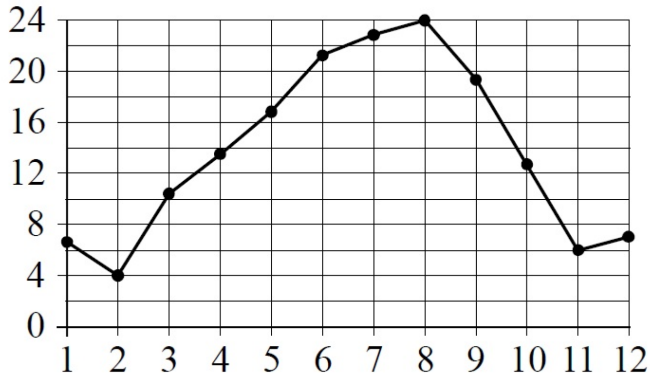
Через 10 минут после отправления наступят следующие сутки. Осталось прибавить их ко времени прибытия. 7 часов 50 минут + 10 минут = 7 часов 60 минут = 8 часов.

Ответ:

8																

2

На рисунке точками показана средняя температура воздуха в Сочи за каждый месяц 1920 г. По горизонтали указаны номера месяцев, по вертикали – температура в градусах Цельсия. Для наглядности точки соединены линией.



Сколько месяцев средняя температура была больше 18 градусов Цельсия?

Решение.

Определим цену деления вертикальной оси, оси температур. Возьмем две подписанные отметки, найдем модуль их разности и разделим его на число делений между этими двумя отметками.

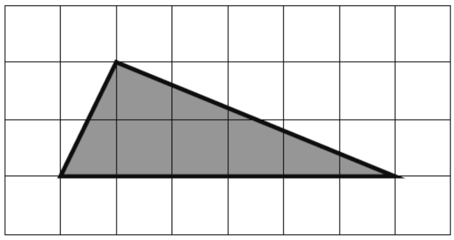
Прикладываем линейку горизонтально к отметке 18 градусов (она между 20 и 16) и считаем количество жирных точек выше линейки. Таких точек ровно 4.

Ответ:

4																

3

На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображен треугольник. Найдите его площадь.



Решение.

Проблем вообще нет никаких – удобная вертикальная высота равна 2, удобная горизонтальная сторона равна 6.

$$S = \frac{1}{2}ah = 6.$$

Ответ:

6																

4

В сборнике билетов по биологии всего 25 билетов. Только в двух билетах встречается вопрос о грибах. На экзамене школьнику достается один случайно выбранный билет из этого сборника. Найдите вероятность того, что в этом билете будет вопрос о грибах.

Решение.

Искомая вероятность есть отношение "хороших" билетов ко всем билетам.

$$\frac{2}{25} = \frac{8}{100} = 0{,}08.$$

Ответ:

0	,	0	8													

5

Найдите корень уравнения $3^{x-5} = 81$.

Решение.

$$3^{x-5} = 81, \qquad 3^{x-5} = 9^2, \qquad 3^{x-5} = (3^2)^2, \qquad 3^{x-5} = 3^4, \qquad x - 5 = 4, \qquad x = 9.$$

Ответ:

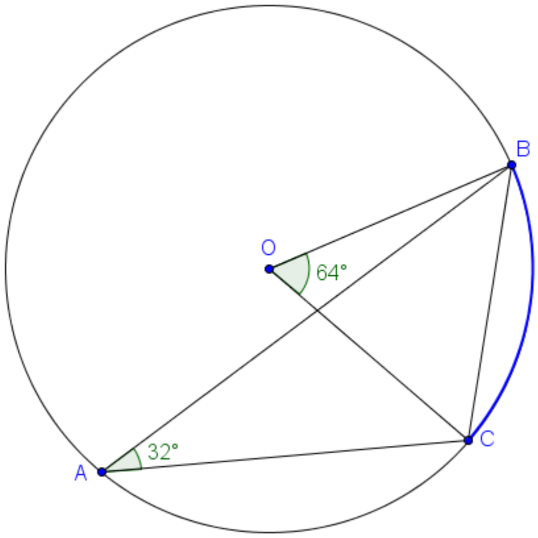
9																

6

Треугольник *ABC* вписан в окружность с центром *O*. Угол *BAC* равен 32°. Найдите угол *BOC*. Ответ дайте в градусах.

Решение.

Центральный угол в двое больше вписанного угла, опирающегося на ту же дугу. Рисунка к задаче дано не было, но я его восстановлю для ясности.



Ответ:

6	4															

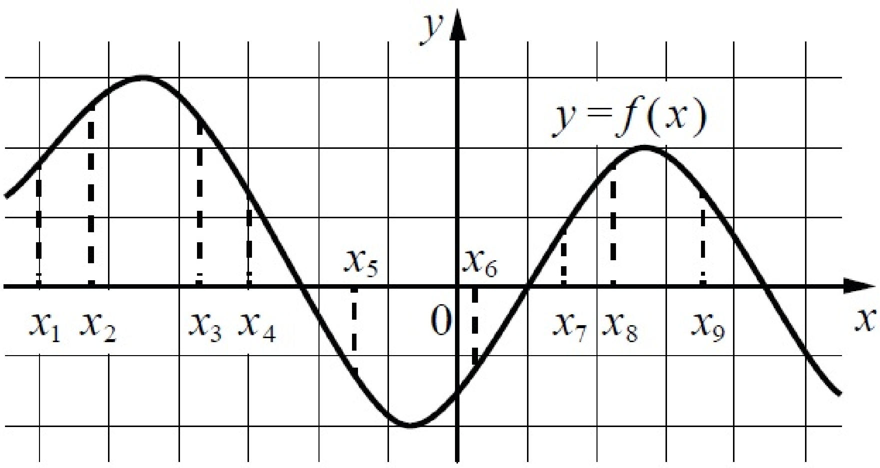
7

На рисунке изображен график дифференцируемой функции $y = f(x)$.

На оси абсцисс отмечены девять точек: x_1, x_2, ..., x_9.

Найдите все отмеченные точки, в которых производная функции $y = f(x)$ отрицательна. В ответ укажите количество этих точек.

Решение.



Производная отрицательна на промежутках убывания функции и положительна на промежутках её возрастания и, наконец, равна нулю в особых точках, в которых функция меняет характер своего изменения. Графически убывание характеризуется *спуском линии вниз* с увеличением *x*, возрастание – *ростом линии вверх* с увеличением *x*, смена характера изменения функции есть либо *горка*, либо *впадинка*. Основываясь лишь на таких простых замечаниях, нетрудно видеть, что нужные нам точки это x_3 x_4, x_5 и x_9 – всего 4.

Ответ:

4																

8

В первом цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 16 см. Эту жидкость перелили во второй цилиндрический сосуд, диаметр основания которого в 2 раза больше диаметра основания первого. На какой высоте будет находиться уровень жидкости во втором сосуде? Ответ выразите в см.

Решение.

Формула объема цилиндра

$$V = S \cdot h = \frac{\pi D^2}{4} h,$$

где S – площадь основания, D – диаметр основания, h – высота цилиндра. У нас

$$V_1 = \frac{\pi D_1^2}{4} h_1, \qquad V_2 = \frac{\pi (2D_1)^2}{4} h_2 = \pi D_1 h_2, \qquad V_1 = V_2 \Rightarrow h_2 = \frac{1}{4} h_1 = 4.$$

Ответ:

4																

9

Найдите $\sin 2\alpha$, если $\cos \alpha = 0{,}6$ и $\pi < \alpha < 2\pi$.

Решение.

$$\pi < \alpha < 2\pi \Rightarrow -1 < \sin \alpha < 0, \qquad \sin \alpha = -\sqrt{1 - (\cos \alpha)^2} = -0{,}8.$$
$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot (-0{,}8) \cdot 0{,}6 =$$

Ответ:

–	0	,	9	6												

10

Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковой сигнал частотой 749 МГц. Приемник регистрирует частоту сигнала, отраженного от дна океана. Скорость погружения батискафа (в м/с) и частота связаны соотношением

$$v = c \cdot \frac{f - f_0}{f + f_0},$$

где c = 1500 м/с – скорость звука в воде; f_0 – частота испускаемого сигнала (в МГц); f – частота отраженного сигнала (в МГц). Найдите частоту отраженного сигнала (в МГц), если батискаф погружается со скоростью 2 м/с.

Решение.

Никакие единицы измерения не меняем, как бы нам того не хотелось. Спокойно выражаем нужную нам букву из формулы.

$$v = c \cdot \frac{f - f_0}{f + f_0}, \qquad vf + vf_0 = cf - cf_0, \qquad f = f_0 \cdot \frac{c + v}{c - v}.$$
$$f = 749 \cdot \frac{1500 + 2}{1500 - 2} = 749 \cdot \frac{1502}{1498} = \frac{1502}{2} = 751.$$

Ответ:

7	5	1														

11

Весной катер идет против течения реки в $1\frac{2}{3}$ раза медленнее, чем по течению. Летом течение становится на 1 км/ч медленнее. Поэтому летом катер идет против течения в $1\frac{1}{2}$ раза медленнее, чем по течению. Найдите скорость течения весной (в км/ч).

Решение.

Обозначим искомую скорость x. Введем также скорость катера y, считая её постоянной и весной, и летом.

Тогда скорость движения по течению весной будет $y + x$, против течения $y - x$. Первое уравнение, согласно условию задачи, выглядит так:

$$\frac{y + x}{y - x} = 1\frac{2}{3}, \qquad 3y + 3x = 5y - 5x, \qquad y = 4x.$$

По условию, скорость течения реки летом замедляется на 1, тогда скорость движения по течению летом будет $y + (x - 1)$, против течения $y - (x - 1)$. Используя полученное равенство и условие, запишем второе уравнение:

$$\frac{y+x-1}{y-(x-1)}=1\frac{1}{2},\qquad \frac{4x+x-1}{4x-x+1}=\frac{3}{2},\qquad 10x-2=9x+3,\qquad x=5.$$

Ответ:

5																

12

Найдите точку максимума функции $y=\ln(x+4)^2+2x+7$.

Решение.

Честно считаем производную, приравниваем её к нулю, находим *стационарные точки* – корни уравнения, среди этих точек ищем точки максимума – проходя через них производная меняет знак с плюса на минус. Отметим, что $x = -4$ не является допустимым значением аргумента.

$$y'=(\ln(x+4)^2+2x+7)'=\frac{1}{(x+4)^2}\cdot[(x+4)^2]'+2=\frac{2(x+4)}{(x+4)^2}+2=$$
$$=\frac{2}{x+4}+2=\frac{2x+10}{x+4}.$$

Единственный корень уравнения $y' = 0$ это $x = -5$.

Ответ:

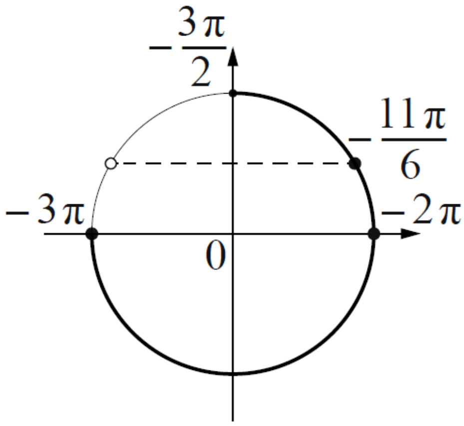
–	5															

13

а) Решите уравнение

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos 2x=\sqrt{3}\cos x+1.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$.



Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$\sin x+\sqrt{3}\cos x+1-2\sin^2 x=\sqrt{3}\cos x+1;\ \sin x-2\sin^2 x=0;\ \sin x\cdot(2\sin x-1)=0.$$

Значит, $\sin x=0$, откуда $x=\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, или $\sin x=\frac{1}{2}$, откуда $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, или $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$.

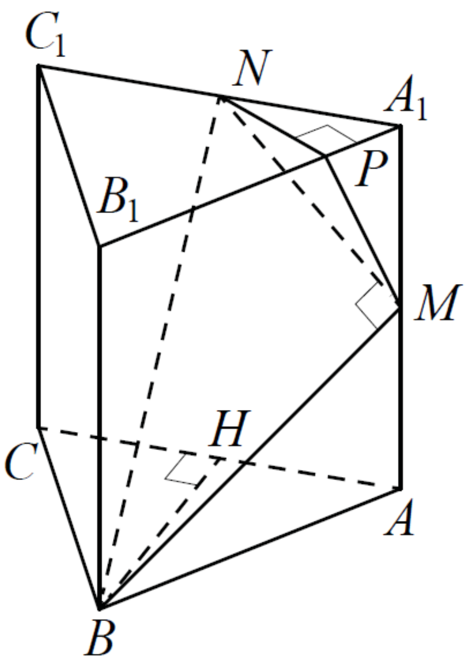
б) С помощью числовой окружности отберем корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$. Получим числа: -3π; -2π; $-\frac{11\pi}{6}$.

Ответ:

а) $\pi k,\ k\in\mathbb{Z};\ \frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\ \frac{5\pi}{6}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$;

б) -3π; -2π; $-\frac{11\pi}{6}$.

14



Все рёбра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину 6. Точки M и N – середины рёбер AA_1 и A_1C_1 соответственно.

а) Докажите, что прямые BM и MN перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями BMN и ABB_1.

Решение.

а) Пусть точка H – середина AC. Тогда

$$(BN)^2 = (BH)^2 + (NH)^2 = \left(3\sqrt{3}\right)^2 + 6^2 = 63.$$

Вместе с тем,

$$(BM)^2 + (MN)^2 = (3^2 + 6^2) + (3^2 + 3^2) = 63,$$

а тогда по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник BMN является прямоугольным с прямым углом M.

б) Проведём перпендикуляр NP к прямой A_1B_1. Тогда $NP \perp A_1B_1$ и $NP \perp A_1A$. Следовательно, угол NMP – линейный угол искомого угла.

Длина NP равна половине высоты треугольника $A_1B_1C_1$, то есть

$$NP = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Поэтому

$$\sin\angle NMP = \frac{NP}{MN} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{3}{8} = \arcsin\sqrt{\frac{3}{8}}.$$

Следовательно, $\angle NMP = \arcsin\sqrt{\frac{3}{8}}$.

Ответ: а) что и требовалось доказать; б) $\arcsin\sqrt{\frac{3}{8}}$.

15

Решите неравенство

$$\log_{11}(8x^2 + 7) - \log_{11}(x^2 + x + 1) \ge \log_{11}\left(\frac{x}{x+5} + 7\right).$$

Решение.

Правая часть неравенства определена при $x < -5$ и $x > -\frac{35}{8}$. Поскольку при любых значениях x выражение $8x^2 + 7$ принимает положительные значения, при $x < -5$ и $x > -\frac{35}{8}$ неравенство принимает вид:

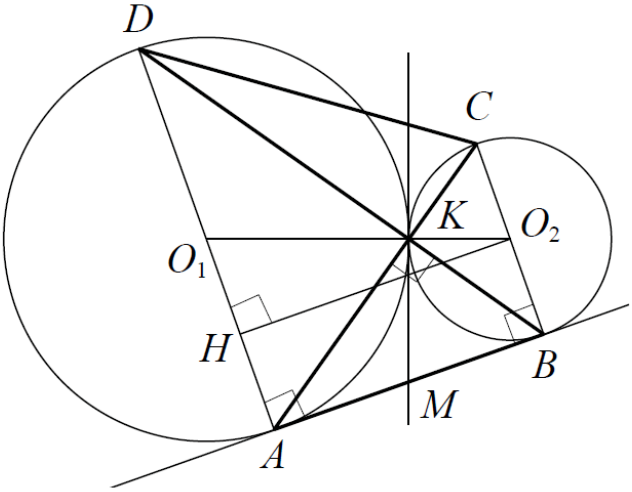
$$\frac{8x^2+7}{x^2+x+1} \ge \frac{8x+35}{x+5};\ \frac{8x^3+40x^2+7x+35}{(x+5)(x^2+x+1)} \ge \frac{8x^3+43x^2+43x+35}{(x+5)(x^2+x+1)};$$

$$\frac{3x^2+36x}{(x+5)(x^2+x+1)} \le 0;\ \frac{3x(x+12)}{(x+5)(x^2+x+1)} \le 0,$$

откуда $x \le 12;\ -5 < x \le 0$. Учитывая ограничения $x < -5$ и $x > -\frac{35}{8}$, получаем: $x \le 12;\ -\frac{35}{8} < x \le 0$.

Ответ: $(-\infty; -12];\ \left(-\frac{35}{8}; 0\right]$.

16



Две окружности касаются внешним образом в точке K. Прямая AB касается первой окружности в точке A, а второй – в точке B. Прямая BK пересекает первую окружность в точке D, прямая AK пересекает вторую окружность в точке C.

а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника AKB, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.

Решение.

а) Обозначим центры окружностей O_1 и O_2 соответственно. Пусть общая касательная, проведённая к окружностям в точке K, пересекает AB в точке M. По свойству касательных, проведенных из одной точки, $AM = KM$ и $KM = BM$. Треугольник AKB, у которого медиана равна половине стороны, к которой она проведена, прямоугольный.

Вписанный угол AKD прямой, поэтому он опирается на диаметр AD. Значит, $AD \perp AB$. Аналогично, получаем, что $BC \perp AB$. Следовательно, прямые AD и BC параллельны.

б) Пусть, для определенности, первая окружность имеет радиус 4, а вторая – радиус 1.

Треугольники BKC и AKD подобны, $\frac{AD}{BC} = 4$. Пусть $S_{BKC} = S$, тогда $S_{AKD} = 16S$.

У треугольников AKD и AKB общая высота, следовательно $\frac{S_{AKD}}{S_{AKB}} = \frac{DK}{KB} = \frac{AD}{BC}$, то есть $S_{AKB} = 4S$. Аналогично, $S_{CKD} = 4S$. Площадь трапеции $ABCD$ равна $25S$.

Вычислим площадь трапеции $ABCD$. Проведём к AD перпендикуляр O_2H, равный высоте трапеции, и найдем его из прямоугольного треугольника O_2HO_1:

$$O_2H = \sqrt{(O_1O_2)^2 - (O_1H)^2} = 4.$$

Тогда

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot AB = 20.$$

Следовательно, $25S = 20$, откуда $S = 0{,}8$ и $S_{AKB} = 4S = 3{,}2$.

Ответ: 3,2.

17

15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r – **целое** число;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение r, при котором общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн рублей.

Решение.

По условию, долг перед банком (в млн рублей) на 15-е число каждого месяца должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$1;\ 0{,}6;\ 0{,}4;\ 0{,}3;\ 0{,}2;\ 0{,}1;\ 0.$$

Пусть $k = 1 + r/100$, тогда долг на 1-е число каждого месяца равен:

$$k;\ 0{,}6k;\ 0{,}4k;\ 0{,}3k;\ 0{,}2k;\ 0{,}1k.$$

Следовательно, выплаты со 2-го по 14-е число каждого месяца составляют:

$$k - 0{,}6;\quad 0{,}6k - 0{,}4;\quad 0{,}4k - 0{,}3;\quad 0{,}3k - 0{,}2;\quad 0{,}2k - 0{,}1;\quad 0{,}1k.$$

Общая сумма выплат составляет:

$$k(1 + 0{,}6 + 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}1) - (0{,}6 + 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}1) =$$
$$= (k-1)(1 + 0{,}6 + 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}1) + 1 = 2{,}6(k-1) + 1.$$

По условию, общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн рублей, значит,

$$2{,}6(k-1) + 1 < 1{,}2;\quad 2{,}6 \cdot \frac{r}{100} + 1 < 1{,}2;\quad r < 7\frac{9}{13}.$$

Наибольшее целое решение этого неравенства – число 7. Значит, искомое число процентов – 7.

Ответ: 7.

18

Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}(|x|-5)^2+(y-4)^2=9,\\ (x+2)^2+y^2=a^2\end{cases}$$

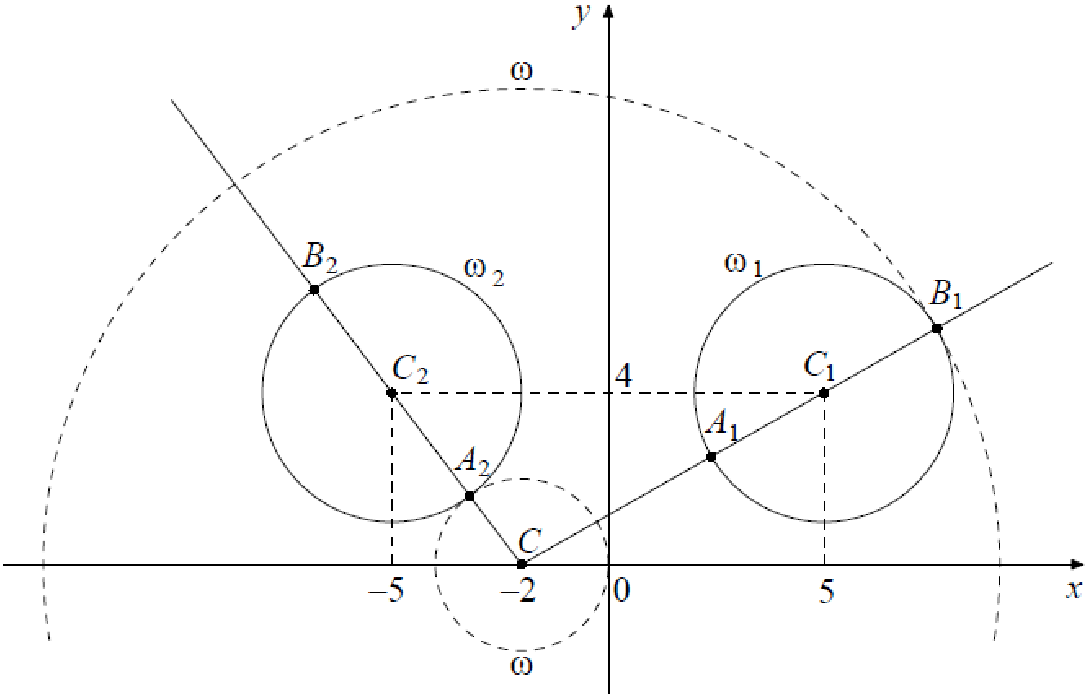
имеет единственное решение.

Решение.

Если $x \geq 0$, то уравнение $(|x|-5)^2+(y-4)^2=9$ задаёт окружность ω_1 с центром в точке $C_1(5;4)$ радиусом 3, а если $x<0$, то оно задаёт окружность ω_2 с центром в точке $C_2(-5;4)$ таким же радиусом (см. рисунок).

При положительных значениях a уравнение $(x+2)^2+y^2=a^2$ задаёт окружность ω с центром в точке $C(-2;0)$ радиусом a. Поэтому задача состоит в том, чтобы найти все значения a, при каждом из которых окружность ω имеет единственную общую точку с объединением окружностей ω_1 и ω_2.

Из точки C проведем луч CC_1 и обозначим через A_1 и B_1 точки его пересечения с окружностью



ω_1, где A_1 лежит между C и C_1. Так как $CC_1=\sqrt{(5+2)^2+4^2}=\sqrt{65}$, то $CB_1=\sqrt{65}-3$, $CB_1=\sqrt{65}+3$.

При $a<CA_1$ или $a>CB_1$ окружности ω и ω_1 не пересекаются.

При $CA_1<a<CB_1$ окружности ω и ω_1 имеют две общие точки.

При $a=CA_1$ или $a=CB_1$ окружности ω и ω_1 касаются.

Из точки C проведем луч CC_2 и обозначим через A_2 и B_2 его точки пересечения с окружностью ω_2, где A_2 лежит между C и C_2. Так как $CC_2=\sqrt{(-5+2)^2+4^2}$, то $CA_2=5-3=2$, $CB_2=5+3=8$.

При $a<CA_2$ или $a>CB_2$ окружности ω и ω_2 не пересекаются.

При $CA_2<a<CB_2$ окружности ω и ω_2 имеют две общие точки.

При $a=CA_2$ или $a=CB_2$ окружности ω и ω_2 касаются.

Исходная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда окружность ω касается ровно одной из двух окружностей ω_1 и ω_2 и не пересекается с другой. Так как $CA_2<CA_1<CB_2<CB_1$, то условию задачи удовлетворяют только числа $a=2$ и $a=\sqrt{65}+3$.

Ответ: 2; $\sqrt{65}+3$.

19

В школах №1 и №2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали, по крайней мере, 2 учащихся, а суммарно тест писали 9 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом. После этого один из учащихся, писавших тест, перешел из школы №1 в школу №2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.

а) Мог ли средний балл в школе №1 уменьшиться в 10 раз?

б) Средний балл в школе №1 уменьшился на 10%, средний балл в школе №2 также уменьшился на 10%. Мог ли первоначальный средний балл в школе №2 равняться 7?

в) Средний балл в школе №1 уменьшился на 10%, средний балл в школе №2 также уменьшился на 10%. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе №2.

Решение.

а) Пусть в школе №1 писали тест 2 учащихся, один из них набрал 1 балл, а второй набрал 19 баллов и перешел в школу №2. Тогда средний балл в школе №1 уменьшился в 10 раз.

б) Пусть в школе №2 писали тест m учащихся, средний балл равнялся B, а перешедший в неё учащийся набрал u баллов. Тогда получаем:

$$u = 0{,}9(m+1)B - mB;\ \ 10u = (9-m)B.$$

Если $B = 7$, то $(9-m)B$ не делится на 10, а $10u$ делится на 10. Но это невозможно, поскольку $10u = (9-m)B$.

в) Пусть в школе №1 средний балл равнялся A. Тогда получаем:

$$u = (9-m)A - 0{,}9(8-m)A;\ \ 10u = (18-m)A = (9-m)B.$$

Заметим, что если $B = 1$ или $B = 3$, то $10u = (9-m)B$ не делится на 10. Если $B = 2$ или $B = 4$, то $m = 4$. В первом случае $14A = 10$, а во втором $14A = 20$. Значит, один из этих случаев не возможен.

При $B = 5$ и $m = 3$ получаем $u = 3$ и $A = 2$. Этот случай реализуется, например, если в школе №1 писали тест 6 учащихся, 3 из них набрали по 1 баллу, а 3 – по 3 балла, в школе №2 писали тест 3 учащихся и каждый набрал по 5 баллов, а у перешедшего из одной школы в другу учащегося – 3 балла.

Ответ: а) 44; б) нет; в) 5.